

Licence Science de la Mer et de l'Environnement

Physique Générale

Chapitre 13 : Transformations réversibles d'un gaz parfait

1 – Transformation d'un gaz parfait

Par exemple, on enferme le gaz dans un cylindre de section S , dans lequel le piston a une masse négligeable, et sans frottements.

a) Echange de travail

On pousse le piston avec une pression extérieure p_E . La force exercée est donc $F = p_E \cdot S$. On a :

$$dW = -F dx = -p_E \cdot S \cdot dx = -p_E \cdot dV$$

Si le volume passe de V_1 à V_2 , le travail échangé sera :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -p_E dV$$

Si $p_E = p_0 = \text{Cte}$ alors $W = -p_0 \cdot (V_2 - V_1)$

Si $V_2 < V_1$ alors $W > 0$, on a fourni du travail au gaz, il y a échauffement.

C'est ce qui se passe avec une pompe à vélo.

b) Echange de chaleur

On suppose que le système est adiabatique. Le système est en équilibre si la pression du gaz est égale à celle de la pression extérieure.

Nous avons vu que :

$$pV = nRT = \frac{m}{M} RT$$

n = nombre de moles de gaz

m = masse du gaz

M = masse molaire du gaz

Si nous passons de l'état 1 à l'état 2, alors :

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR$$

D'après la loi de Joule, la variation d'énergie interne :

$$\Delta U_i = W + Q$$

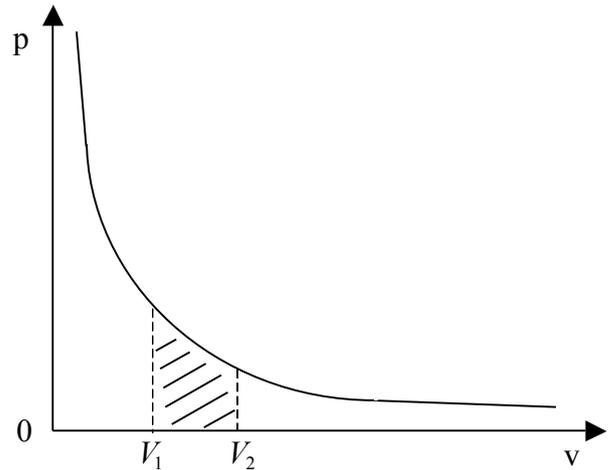
2 – Irréversibilité des transformations

En principe quand on passe de l'état 1 à l'état 2, les étapes intermédiaires ne sont pas à l'équilibre. Il faut un certain temps pour que la température s'uniformise dans le gaz. La transformation est dite irréversible. On ne peut pas faire de retour en arrière dans les mêmes conditions.

Dans les conditions limites, c'est à dire idéales et irréalisables, on peut supposer que l'on effectue une suite continue d'états d'équilibre, p et T variant continûment, et la température étant à chaque instant uniforme dans tout le volume.

A chaque instant la pression p à l'intérieur du cylindre est égale à la pression extérieure : $p=p_E$.

Dans ce cas, on peut aller en sens inverse sur la même courbe.



a) Réversibilité thermique

On chauffe de T à T' une masse gazeuse à volume constant. On met par exemple en contact une paroi du cylindre avec le milieu à une température variable par paliers :

$$T_1 = T + \Delta T$$

$$T_2 = T_1 + \Delta T$$

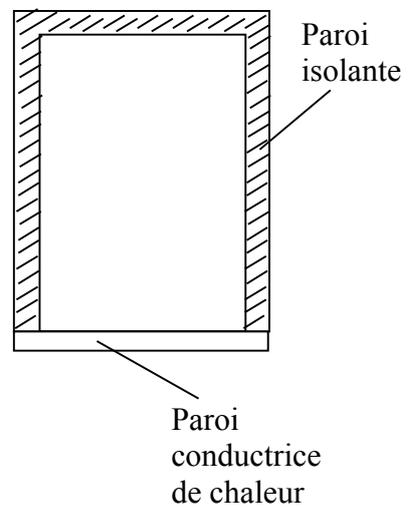
$$T_3 = T_2 + \Delta T$$

.....

$$T_{n-1} = T_{n-2} + \Delta T$$

$$T_n = T_{n-1} + \Delta T = T'$$

Quand $\Delta T \rightarrow 0$ la transformation devient réversible, mais évidemment le temps pour l'accomplir devient infiniment long.



b) Réversibilité mécanique

Nous nous plaçons dans le cas de transformations adiabatiques.

Soit un gaz parfait en équilibre dans une enceinte adiabatique. On applique une pression extérieure $p_E > p$ du gaz.

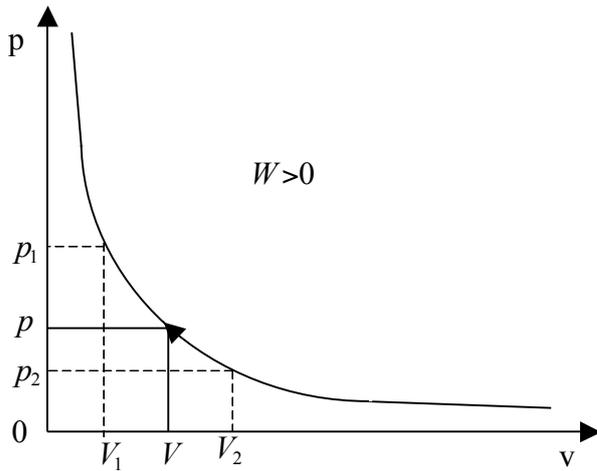
Le nouvel équilibre après uniformisation de la pression et de la température :
 $v' = v + \Delta v$ et $p' = p + \Delta p$

Dans ce cas, ce n'est pas une transformation réversible. On peut faire une transformation adiabatique réversible en partant de l'état initial p, V, T .

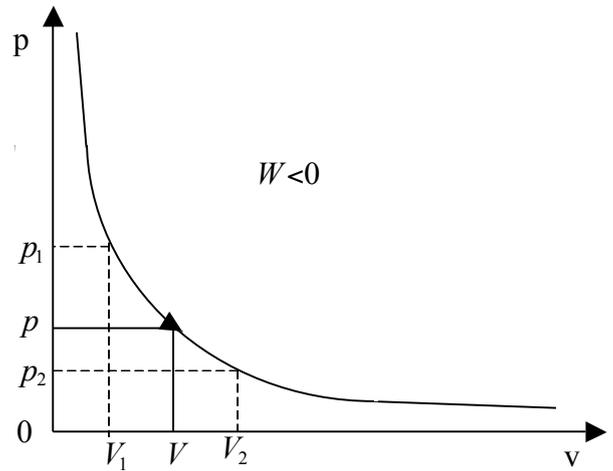
La pression extérieure est d'abord $p_E = p$, puis $p + dp$. Le piston est soumis à une force $dF = S \cdot dp$. Il se déplace. La pression varie de $p + dp$, le volume de V à $V + dV$ et la température de T à $T + dT$.

On fait une transformation réversible en allant très lentement de p_1 à p_2 .
 Le travail est donné par :

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -pdV$$



Compression adiabatique réversible



Détente adiabatique réversible

3 – Transformations isothermes réversibles d'un gaz parfait

a) Transformation isotherme réversible élémentaire

Soit un gaz parfait en équilibre (p, V, T) , en relation avec un thermostat à la température T . On accroît la pression de dp , le volume diminue de dV . Le gaz reçoit un travail :

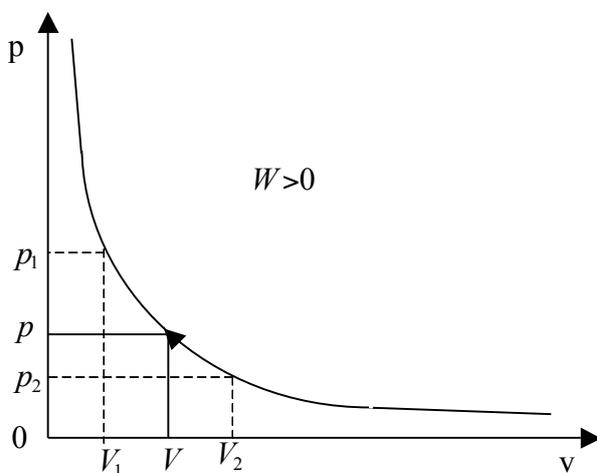
$$W = -pdV$$

Le gaz a tendance à s'échauffer puisqu'il est comprimé, mais il est en contact avec le thermostat à la même température T . Le système va donc céder dQ au thermostat.

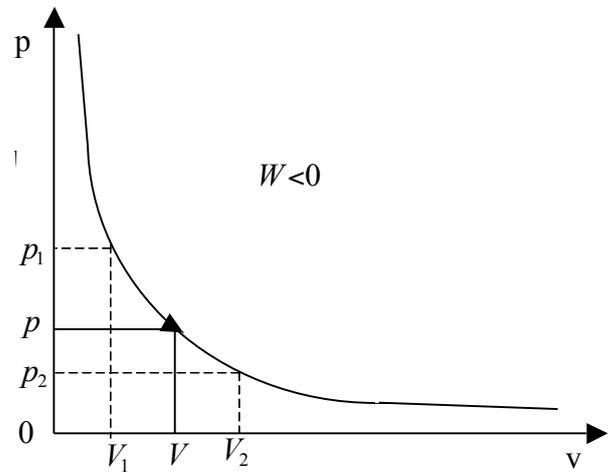
On a la relation des gaz parfaits ;

$$pV = Cte, \text{ d'où en faisant une dérivée logarithmique : } \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$$

On peut retrouver ce résultat en faisant la dérivée : $d(pV) = Vdp + pdV = 0$. En divisant par pV , on retrouve : $\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0$, d'où : $\frac{dp}{p} = -\frac{dV}{V}$



Compression isotherme réversible



Détente isotherme réversible

La température étant constante, l'énergie interne ne varie pas. C'est la loi de Joule : l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

$$dW + dQ = -pdV + dQ = 0$$

Donc :

$$dQ = pdV$$

b) Transformation isotherme réversible finie

Dans une transformation isotherme, sur un graphique $p(V)$, la courbe à température constante T est une hyperbole. Dans le cas d'une transformation finie, nous décrivons l'arc d'hyperbole compris entre les points A_1 et A_2 . On passe du point $A_1(p_1, V_1, T)$ au point $A_2(p_2, V_2, T)$.

On a :

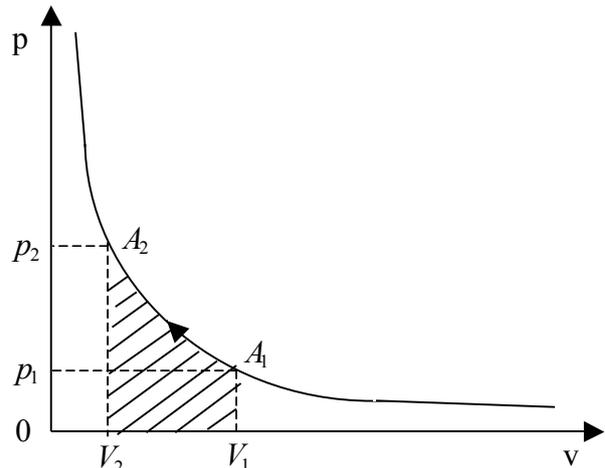
$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = pV = nRT$$

$$\text{Donc : } p = \frac{p_1 V_1}{V}$$

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -pdV = -p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V}$$

$$W = -p_1 V_1 \left[\ln V \right]_{V_1}^{V_2} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$W = nRT \ln \frac{V_1}{V_2} = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$



Le travail W ne dépend que des états initial et final. Il représente graphiquement l'aire hachurée sous la courbe

Pour une compression isotherme : $W > 0$

Pour une détente isotherme : $W < 0$

La température étant restée constante, l'énergie interne n'a pas varié :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

Donc :

$$W = -Q$$

Dans une transformation isotherme réversible finie, travail et chaleur sont égaux et de signe opposés. Le travail fourni par la compression est perdu en chaleur.

Exercice

On comprime isothermiquement $1m^3$ d'air de 1 à $200atm$. On suppose que l'air se comporte comme un gaz parfait. Calculer le travail de compression, et la quantité de chaleur exprimée en kilocalories cédée par le gaz au milieu extérieur.

$$W = p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} \quad \text{avec } p_1 = 10^5 Nm^{-2} \quad p_2 = 200 \cdot 10^5 Nm^{-2} \text{ et } V_1 = 1m^3$$

$$\text{Donc : } W = 10^5 \ln 200 \quad \ln 200 = 5,3$$

$$\text{D'où } W = 5,3 \cdot 10^5 J \quad \text{et} \quad Q = -127 kcal$$

$$\text{Le volume final sera : } V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = 0,005 m^3 = 5l$$

4 – Transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait

La transformation étant adiabatique, il n'y a pas d'échange de chaleur avec le système. Donc $dQ=0$. La relation des gaz parfaits s'applique : $pV=nRT$, où n est le nombre de moles.

a) Transformation adiabatique réversible élémentaire

On passe de (p,V,T) à $(p+dp,V+dV,T+dT)$

Si on fait la dérivée logarithmique de $pV=nRT$, on obtient : $\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$

On peut retrouver ce résultat en dérivant $pV=nRT$:

$pdV+Vdp=nRdT$. On divise le terme de gauche par pV , et celui de droite par nRT .

On obtient alors $\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$.

La transformation étant adiabatique, $dQ=0$, donc $dU=dW=-pdV$

Or pour les gaz parfaits, l'énergie interne U ne dépend que de la température.

Donc : $dU=dW=-pdV=nC_VdT$

Comme $p=\frac{nRT}{V}$, et $C_V=\frac{R}{\gamma-1}$

Alors : $\frac{-nRT}{V}dV=\frac{nR}{\gamma-1}dT$

D'où $\frac{dT}{T}+(\gamma-1)\frac{dV}{V}=0$

Or $\frac{dp}{p}+\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}$

Donc : $\frac{dp}{p}+\frac{dV}{V}+(\gamma-1)\frac{dV}{V}=0$

Finalement :

$$\boxed{\frac{dp}{p}+\gamma\frac{dV}{V}=0}$$

Relation entre p et V

C'est l'équation différentielle d'une adiabatique en coordonnées de Clapeyron.

On peut aussi écrire :

$\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}-\frac{dp}{p}$ or $\frac{dp}{p}=-\gamma\frac{dV}{V}$

Donc : $\frac{dV}{V}=\frac{dT}{T}+\gamma\frac{dV}{V}$ et $\boxed{\frac{dT}{T}=(1-\gamma)\frac{dV}{V}}$

Relation entre T et V .

On a $\frac{dV}{V}=\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{p}$ D'où

$$\boxed{\frac{dT}{T}=\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{dp}{p}}$$

Relation entre T et p .

b) Transformation adiabatique réversible finie

En partant du point $A_1(p_1, V_1, T_1)$ on va vers $A_2(p_2, V_2, T_2)$

$$\text{Or : } \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

On peut ré-écrire cette équation :

$$d(\ln p) + \gamma d(\ln V) = 0$$

$$d(\ln(pV^\gamma)) = 0$$

En intégrant l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\ln(pV^\gamma) = \text{Cte}$$

Ou encore :

$$p \cdot V^\gamma = \text{Cte} = p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$$

C'est l'équation de Laplace.

Avec cette équation, on a supposé que γ et C_V étaient constant. Ceci est vrai pour les gaz parfaits.

Les deux autres relations donnent :

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{Donc } TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0 \quad \text{Donc } \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \text{Cte}$$

$$\text{On a : } TV^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} = \text{Cte} \quad \text{Donc : } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

$$\text{De même : } \frac{T^\gamma}{p^{\gamma-1}} = \frac{T_1^\gamma}{p_1^{\gamma-1}} = \frac{T_2^\gamma}{p_2^{\gamma-1}} = \text{Cte} \quad \text{Donc } \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

On peut donc écrire :

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = (\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

c) Calcul du travail et de la variation d'énergie interne dans une transformation adiabatique

Nous savons que $dW = -pdV$

Dans une transformation adiabatique : $p \cdot V^\gamma = p_1 \cdot V_1^\gamma$

D'où : $p = p_1 \cdot V_1^\gamma \cdot V^{-\gamma}$

On en déduit : $dW = -p_1 \cdot V_1^\gamma \cdot V^{-\gamma} dV$

$$\text{Or } V^{-\gamma} dV = \frac{d(V^{1-\gamma})}{1-\gamma}$$

On peut écrire : $dW = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} d(V^{1-\gamma})$

En intégrant chaque membre, on obtient :

$$W = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} \int_{V_1}^{V_2} d(V^{1-\gamma}) = \frac{p_1 V_1^\gamma}{\gamma-1} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

$$W = \frac{1}{\gamma-1}(p_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - p_1 V_1^\gamma V_1^{1-\gamma}) = \frac{1}{\gamma-1}(p_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} - p_1 V_1)$$

Or : $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ donc : $p_1 V_1^\gamma V_2^{1-\gamma} = p_2 V_2^\gamma V_2^{1-\gamma} = p_2 V_2$

La variation d'énergie interne est donc :

$$\Delta U_i = W = \frac{1}{\gamma-1}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{nR(T_2 - T_1)}{\gamma-1} = nC_V(T_2 - T_1)$$

Pour un gaz monoatomique (argon) : $C_V = \frac{3}{2}R$ et $\gamma = \frac{5}{3}$

Donc dans ce cas : $pV^{5/3} = Cte$

$$W = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1)$$

Pour un gaz diatomique : $C_V = \frac{5}{2}R$ et $\gamma = \frac{7}{5}$

Donc dans ce cas : $pV^{7/5} = Cte$

$$W = \frac{5}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}(p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1)$$

5 – Pentes de l'adiabatique et de l'isotherme

On veut comparer les pentes des courbes adiabatiques et isothermes. Pour cela du point A , on fait passer une isotherme d'équation $pV = Cte$, et une adiabatique d'équation $pV^\gamma = Cte$. Sur l'axe des volumes, on se déplace de $dV_i = dV_a$ autour du point A .

Les déplacements correspondant sur l'isotherme seront dp_i et sur l'adiabatique dp_a .

Sur l'isotherme on a les déplacements : $(p+dp_i, V+dV_i)$

Et on a $\frac{dp_i}{p} + \frac{dV_i}{V} = 0$

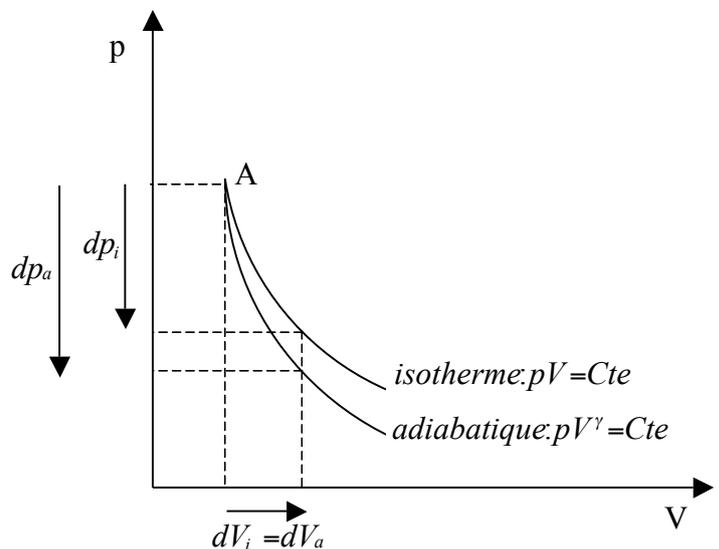
La pente au point A , sera $\boxed{\frac{dp_i}{dV_i} = -\frac{p}{V}}$

Sur l'adiabatique on a les déplacements : $(p+dp_a, V+dV_a)$

Et on a $\frac{dp_a}{p} + \gamma \frac{dV_a}{V} = 0$

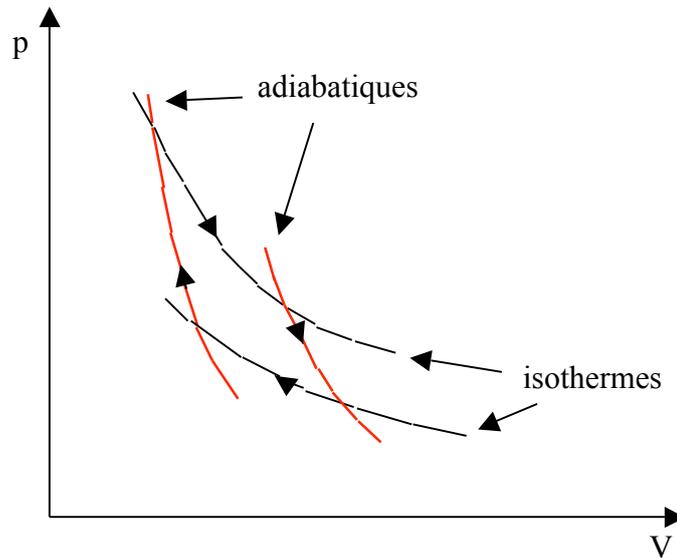
On en déduit la pente au point A : $\boxed{\frac{dp_a}{dV_a} = -\frac{\gamma p}{V}}$

La pente de l'adiabatique est γ fois plus grande que celle de l'isotherme.



Cycle de Carnot

Il se compose de deux isothermes et de deux adiabatiques.



6 – Propagation du son dans les gaz

La vitesse du son est donnée par $c = \sqrt{\frac{1}{\chi \rho}}$ (sans démonstration)

Avec $\chi = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{..T}$ coefficient de compressibilité

Et ρ masse volumique du gaz

Les vibrations du son sont rapides, donc adiabatiques :

$$\left(\frac{dV}{dp} \right)_{..a} = -\frac{1}{\gamma} \frac{V}{p} \quad \text{D'où} \quad \chi = \frac{1}{\gamma p}$$

$$\text{D'où finalement : } c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

On peut ré-écrire l'équation des gaz parfaits : $pV = RT$ de la manière suivante :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}$$

$$\text{Donc } c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}}$$

Pour l'air à $t=0^\circ\text{C}$, $\gamma=1,4$, $R=8,32$ et $M=28,8 \text{ g.mole}^{-1}$

$$c = 332 \text{ m.s}^{-1}$$