Licence Science de la Mer et de l'Environnement

Physique Générale

Chapitre 1 :L'oscillateur harmonique

1- Les équations aux dimensions

Quand on écrit des équations en physique, il est important de vérifier les erreurs de calcul éventuelles. Une des méthodes est de vérifier que les dimensions sont correctes. Par ailleurs cette technique permet de connaître les unités d'une grandeur physique inconnue.

Depuis la Révolution Française, et la mise en place du système métrique, plusieurs systèmes ont été élaborés. Le dernier en date, le Système International (SI) s'appuie sur les grandeurs suivantes :

M	Le mètre	a pour dimension une longueur	L
K	Le kilogramme	a pour dimension une masse	M
S	La seconde	a pour dimension un temps	T
A	L'ampère	a pour dimension un courant	I

C'est l'ancien système MKSA qui porte maintenant le nom de SI. Auparavant on utilisait le système CGS (Centimètre, Gramme, Seconde).

Exemples :

La vitesse, exprimée en mètres/seconde, on écrit [vitesse] = LT^{-1}
L'accélération, exprimée en mètres/seconde/seconde, on écrit [accélération] = LT^{-2}
La force, déduite de la formule f = ma on écrit [force] = MLT^{-2}
L'énergie, déduite de la formule $E = (1/2)mv^2$ on écrit [énergie] = ML^2T^{-2}

2- L'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est un système très utilisé en physique. On retrouve ce formalisme dans de nombreux systèmes, par exemple une masse attachée à un ressort, ou un pendule simple. Pour illustrer l'équation du mouvement, nous allons étudier le pendule simple.

2.1. Le pendule simple

Soit une masse « **m** » supposée ponctuelle attachée par une tige de masse négligeable au point « **M** »et de longueur « **l** » à un point « **O** ». Initialement on déplace la masse de sa position d'équilibre d'un angle « θ » comme montré sur la figure 1. Sur la masse « **m** » s'exercent deux forces : d'une part le poids **P = mg**, et d'autre part la traction sur la tige **T**. En appliquant le principe de la dynamique du point, on trouve :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$

Si nous projetons ces la force due au poids d'une part le long du rayon **OM**, et d'autre part sur la tangente au point **M**, on trouve :

$$F = mg\cos(\theta)$$

Et $f = -mg\sin(\theta)$

Cette force est négative, car elle est de signe opposé à l'angle θ**.**

Comme le point « **M** » reste en permanence sur le cercle de rayon « l », il faut que **T+F.= 0**
Il ne reste donc plus comme force que « **f** ». L'équation du mouvement est donc :

$$-mg\sin(\theta) = ma_\theta$$

où a_θ est l'accélération angulaire. Il n'y a pas d'accélération radiale, car le point M reste sur un cercle de rayon constant.

Dans un mouvement circulaire, la vitesse tangentielle est donnée par :

$$v_\theta = l\dot{\theta}$$

et l'accélération tangentielle sera :

$$a_\theta = l\ddot{\theta}$$

Donc, $-mg\sin(\theta) = ml\ddot{\theta}$

En simplifiant, on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0} \qquad (1)$$

Cette équation est difficile à résoudre à cause du sinus. On constate tout de même qu'elle ne dépend pas de la masse. Elle ne dépend que de la longueur du pendule et de l'accélération de la pesanteur.

Un cas particulier est celui des petits mouvements où l'angle « $\boldsymbol{\theta}$ » est petit. Dans ce cas, $\sin(\theta) = \theta$

L'équation du mouvement (1) devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0} \qquad (2)$$

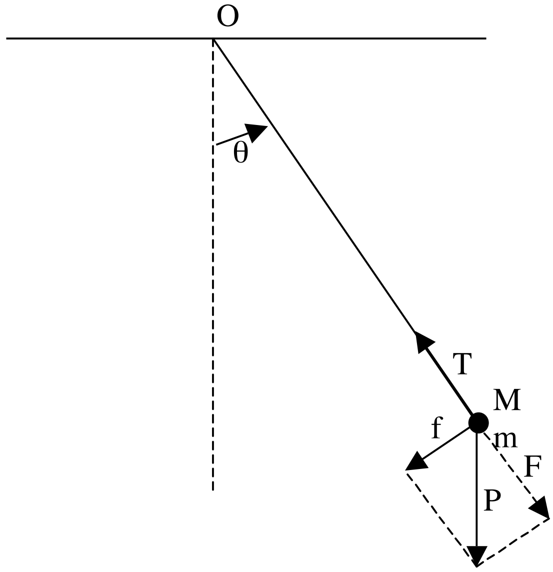

Figure 1

Nous allons maintenant chercher la solution $\theta(t)$ de la forme :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (3)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{\theta}(t)=-\theta_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

En dérivant une deuxième fois par rapport au temps, on obtient :

$$\ddot{\theta}(t)=-\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad (4)$$

En remplaçant (3) et (4) dans (2) nous obtenons :

$$-\theta_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{g}{l}\theta_0\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$$

que l'on peut réécrire en regroupant les termes :

$$(\frac{g}{l}-\omega_0^2)\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$$

Cette équation doit être vérifiée quel que soit « t » donc

$$\frac{g}{l}-\omega_0^2=0$$

donc $$\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad (5)$$

ω_0 est la pulsation propre du pendule.

Sachant que $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$, on en déduit que la période propre du pendule simple pour des petits mouvements est :

$$\boxed{T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}} \qquad (6)$$

On peut vérifier la validité de cette relation en regardant l'équation aux dimensions :

$$[T_0] = T \quad \text{et} \quad \left[\frac{g}{l}\right]^{1/2}=\left[\frac{L}{LT^{-2}}\right]^{1/2}=T$$

La relation (6) est donc homogène du point de vue des dimensions.

Pour déterminer complètement l'équation du mouvement, il manque la connaissance de θ_0 et φ. Pour les trouver, il faut connaître les conditions initiales, c'est à dire l'angle et la vitesse angulaire à t=0. Ce sera vu en exercice au cours des Travaux Dirigés.

<u>*Application numérique*</u>

Longueur l=1m et g=9,81ms^{-2}

Calculer la période
Quelle doit être la longueur pour que la période soit de 1seconde ?

2.1. Le ressort horizontal

Le mouvement d'un ressort est identique à celui du pendule dans l'approximation des petits mouvements. Afin de s'affranchir de la force gravitationnelle, nous plaçons le ressort horizontalement sur l'axe **Ox**. Une masse « **m** » glisse sur l'axe **Ox** sans frottements. Soit « **O** » la position de la masse « **m** » au repos. Soit «**M**» la position de la masse « **m** » quand le ressort est allongé de « **x** » comme indiqué sur la figure 2.

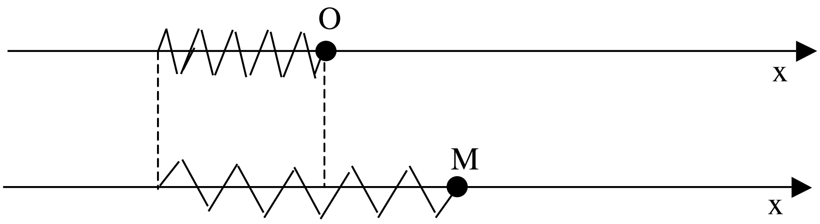

Figure 2

La raideur du ressort étant « **k** », la force de rappel « **F** »est proportionnelle à l'allongement « **x** ». Dans cette application la longueur du ressort n'intervient pas. Nous avons :

F = -kx, mais également avec comme pour le pendule F = ma

« x » et « a » étant des fonctions du temps, on obtient :

$$m\ddot{x}(t)=kx(t)$$

cette relation se réécrit :

$$\boxed{\ddot{x}(t)+\frac{k}{m}x(t)=0} \qquad (7)$$

La relation (7) est formellement identique à la relation (2). On la résout de la même manière en posant :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad (8)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{x}(t)=-x_0\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) \qquad (9)$$

En dérivant une deuxième fois on obtient :

$$\ddot{x}(t)=-x_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi) \qquad (10)$$

En reportant les relations (8) et (9) dans la relation (7), on obtient :

$$-x_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi)+\frac{k}{m}x_0\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$\left(\frac{k}{m}-x_0^2\right)\cos(\omega_0 t+\varphi)=0$$

On obtient : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ (11)

De la même manière que pour le pendule simple, on peut vérifier que les dimensions sont correctes. En effet :

$$[T_0] = T \quad \text{et} \quad \left[\frac{M}{[k]}\right]^{1/2}=\left[\frac{M}{[F][L^{-1}]}\right]^{1/2}=\left[\frac{M}{MLT^{-2}L^{-1}}\right]=T$$

De la même manière pour déterminer complètement l'équation du mouvement, il faut connaître les conditions initiales, c'est à dire la position et la vitesse au temps t=0. par exemple si on suppose qu'à t=0, l'amplitude $x(0)=X_0$, et que la vitesse initiale est nulle : $\dot{x}(0)=0$, alors en replaçant ces deux valeurs dans les équations (8) et (9), on obtient :

$$X_0 = x_0 \cos(\varphi)$$

Et $0=x_0\omega_0\sin(\varphi)$ donc $\sin(\varphi)=0$

Donc $\varphi = 0$ ou π et $\cos(\varphi) = 1$ ou $=1$, donc

On trouve $x_0 = X_0$ ou $x_0 = -X_0$

En fait ces deux solutions sont équivalentes, et l'équation du mouvement s'écrit :

$$\boxed{x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)} \quad \text{avec } \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Si on trace sur la courbe de x(t) en fonction du temps, on obtient la figure 3

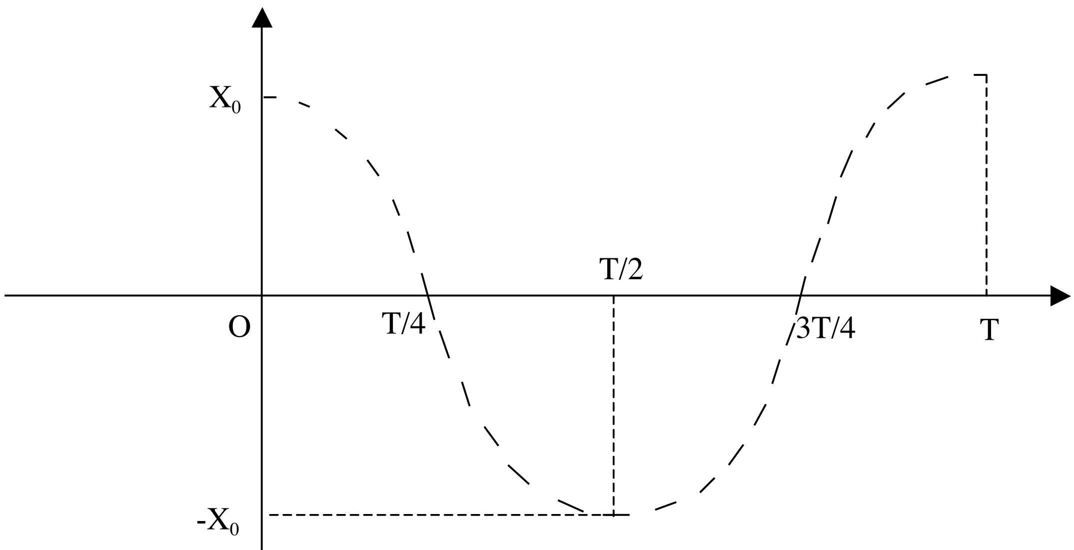

Figure 3

On peut montrer que l'énergie de l'oscillateur se conserve, c'est à dire que la somme entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique est constante.

L'énergie cinétique est donnée par : $E_c = \frac{1}{2}mv^2$

L'énergie potentielle est donnée par : $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

L'énergie totale est donc : $E_T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

En remplaçant v et x par leurs valeurs, on obtient :

$$E_T = \frac{1}{2}mx_0^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_0^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

on déduit de (11) : $m\omega_0^2 = k$

Donc : $E_T = \frac{1}{2}kx_0^2(\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi))$

Finalement : $\boxed{E_T = \frac{1}{2}kx_0^2}$

Ceci correspond à l'énergie potentielle quand le ressort est tendu au maximum avec une vitesse nulle