Université de la Méditerranée
Physique Statistique

Examen partiel du 14 mars 2011

Corrigé

1) On a : $g_1 = g(N_1, s_1) = g(N_1, 0)\exp\dfrac{-s_1^2}{2N_1}$ et $g_2 = g(N_2, s_2) = g(N_2, 0)\exp\dfrac{-s_2^2}{2N_2}$

2) On a : $N = N_1 + N_2$

$U(s) = U_1(s_1) + U_2(s_2) = Constante$

$s = s_1 + s_2$ donc : $s_2 = s - s_1$

D'où : $\boxed{g(N,s) = g_2.g_2 = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\left[\dfrac{s_1^2}{2N_1} + \dfrac{s_2^2}{2N_2}\right]}$ (1)

Le produit $g_1.g_2$ donne les états accessibles du système total (1)+(2)

3)L'état le plus probable de (1)+(2) a lieu quand $g_1.g_2$ est maximum, ou si $\ln g_1.g_2$ est maximum.

Démonstration :

Soit $f(x)$ une fonction quelconque son extremum est obtenu quand $\dfrac{df(x)}{dx} = 0$.

De la même manière l'extremum de $\ln f(x)$ est obtenu quand $\dfrac{d\ln f(x)}{dx} = 0$ *donc* $\dfrac{\frac{df(x)}{dx}}{f(x)} = 0$

Comme $f(x) \neq 0$, alors $\dfrac{df(x)}{dx} = 0$.

Etudier l'extremum de $f(x)$ est identique à l'étude de celui de $\ln f(x)$

On va donc rechercher l'extremum de $\ln g_1.g_2$

$$\ln g_1.g_2 = \ln(g(N_1,0).g(N_2,0)) - \left[\frac{s_1^2}{2N_1} + \frac{s_2^2}{2N_2}\right]$$

On remplace s_2 par sa valeur $s - s_1$ d'où :

$$\ln g_1.g_2 = \ln(g(N_1,0).g(N_2,0)) - \left[\frac{s_1^2}{2N_1} + \frac{(s-s_1)^2}{2N_2}\right]$$

En dérivant par rapport à s_1, on obtient :

$$\frac{d\ln g_1.g_2}{ds_1} = \frac{-2s_1}{2N_1} + \frac{2(s-s_1)}{2N_2}$$

L'extremum est obtenu quand : $s_1 = S_1$ pour $\frac{-2S_1}{2N_1} + \frac{2(s - S_1)}{2N_2} = 0$

Si on appelle : $S_2 = s - S_1$, alors : $\boxed{\frac{S_1}{N_1} = \frac{S_2}{N_2} = \frac{S_1 + S_2}{N_1 + N_2} = \frac{s}{N}}$

Pour vérifier que l'extremum est un maximum, il faut regarder le signe de la dérivée seconde.

$\frac{d^2 \ln g_1.g_2}{ds_1^2} = \frac{-1}{N_1} - \frac{1}{N_2} < 0$, c'est donc bien un maximum.

4) Le maximum a lieu quand $\frac{S_1}{N_1} = \frac{S_2}{N_2} = \frac{s}{N}$.

Donc : $S_1 = s\frac{N_1}{N}$ et $S_2 = s\frac{N_2}{N}$

On remplace dans (1) :

$$g_2.g_2^{\max} = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\left[\frac{\frac{s^2N_1^2}{N^2}}{2N_1} + \frac{\frac{s^2N_2^2}{N^2}}{2N_2}\right]$$

$$g_2.g_2^{\max} = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\left[\frac{s^2N_1}{2N^2} + \frac{s^2N_2}{2N^2}\right]$$

$$g_2.g_2^{\max} = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\frac{s^2(N_1 + N_2)}{2N^2}$$

$$\boxed{g_2.g_2^{\max} = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\frac{s^2}{2N}}$$

5) Soit $s_1 = S_1 + \delta$, donc : $s_2 = S_2 - \delta$

Donc : $s_1^2 = S_1^2 + 2S_1.\delta + \delta^2$ et $s_2^2 = S_2^2 - 2S_2.\delta + \delta^2$

La relation (1) est:

$$g_2.g_2 = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\left[\frac{s_1^2}{2N_1} + \frac{s_2^2}{2N_2}\right]$$

Or, $g_2.g_2^{\max} = g(N_1,0).g(N_2,0)\exp-\left[\frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}\right]$

Ou $g(N_1,0).g(N_2,0) = g_2.g_2^{\max}\exp\left[\frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}\right]$

Donc en remplaçant $g(N_1,0).g(N_2,0) = g_2.g_2^{\max}\exp\left[\frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}\right]$

On obtient : $g_2.g_2 = g_2.g_2^{\max}\exp\left[\frac{-s_1^2}{2N_1} + \frac{-s_2^2}{2N_2} + \frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}\right]$

$$g_2.g_2 = g_2.g_2^{\max} \exp\left[\frac{-S_1^2 - 2S_1.\delta - \delta^2}{2N_1} + \frac{-S_2^2 - 2S_2.\delta - \delta^2}{2N_2} + \frac{S_1^2}{2N_1} + \frac{S_2^2}{2N_2}\right]$$

Comme $\frac{S_1}{N_1} = \frac{S_2}{N_2}$, alors :

$$\boxed{g_1.g_2 = g_2.g_2^{\max} \exp\left[\frac{-\delta^2}{2N_1} - \frac{\delta^2}{2N_2}\right]}$$

6) Pour avoir $g_1.g_2 = \frac{g_2.g_2^{\max}}{x}$, il faut avoir :

$$\boxed{\exp\left[\frac{-\delta^2}{2N_1} - \frac{\delta^2}{2N_2}\right] = \frac{1}{x}}$$

7) Application Numérique :

Une mole de Co_{59} a une masse molaire de $59g$, soit $6.10^{23}\,atomes$, donc $1g$ de Co_{59} contient environ $\frac{6.10^{23}}{59} = 10^{22}\,atomes$

Donc : $N_1 = N_2 = 10^{22}$

a) si $x = 20$, $\exp\left[\frac{-\delta^2}{2N_1} - \frac{\delta^2}{2N_1}\right] = \frac{1}{x}$, donc : $\exp\left[\frac{-\delta^2}{N_1}\right] = \frac{1}{20}$ $\qquad \frac{-\delta^2}{N_1} = \ln\frac{1}{20}$

$\delta^2 = N_1.\ln 20$ $\qquad$ or $\ln 20 = 3$, donc $\delta^2 = 3.10^{22}$ $\qquad$ $\delta = 1{,}73.10^{11}$ et $\boxed{\frac{\delta}{N_1} = 1{,}73.10^{-11}}$

b) de même si $x = 400$,

$\delta^2 = N_1.\ln 400$, $\ln 400 = 6$, donc $\delta^2 = 6.10^{22}$ $\qquad$ $\delta = 2{,}45.10^{11}$ et $\boxed{\frac{\delta}{N_1} = 2{,}45.10^{-11}}$